

Polygonzugmethode

Es werde das Anfangswertproblem $y' = f(x, y)$, $y(0) = 0$ mit der durch

$$f(x, y) = y|y|^{-3/4} + x \sin \frac{\pi}{x}$$

gegebenen stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet (für $y = 0$ werde $y|y|^{-3/4} = 0$ und für $x = 0$ werde $x \sin \frac{\pi}{x} = 0$ gesetzt). Sei $\delta = (n + \frac{1}{2})^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$ und y_n der zugehörige Eulersche Polygonzug mit den Stützstellen $x_k = k\delta$. Beweisen Sie, daß die Folge $\{y_n\}_{n \geq 1}$ dieser Polygonzüge in keinem Intervall der Form $[0, a]$, $a > 0$ gleichmäßig konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie durch Fallunterscheidung n gerade/ungerade und untere bzw. obere Abschätzung, daß die Folge $\{y_n(x)\}_{n \geq 1}$ für kein $x \in (0, a_0)$, $a_0 > 0$ hinreichend klein, konvergiert.